

# Warum die “arabische” Zahlenrepräsentation so geschickt ist

Miriam Seel & Sascha Frank

November 2, 2004

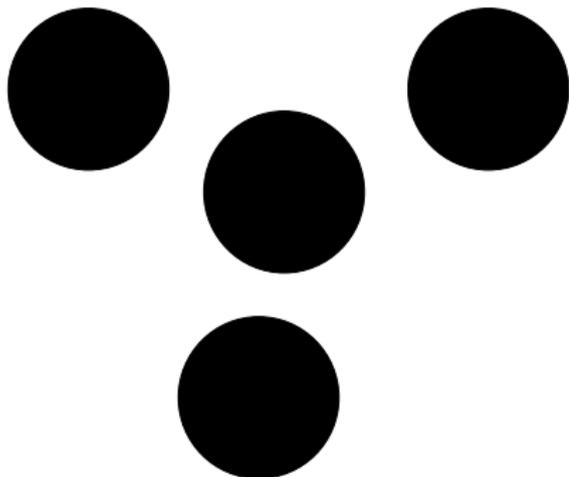
## Kleiner Test







Wieviele Kugeln waren es ?



## Kleiner Test

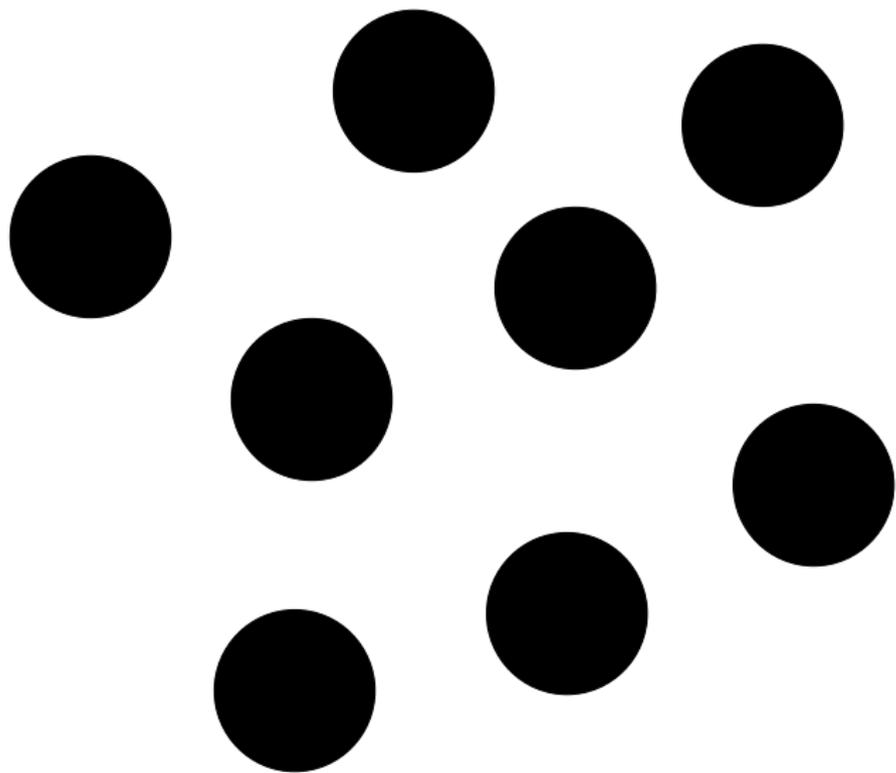
Basen

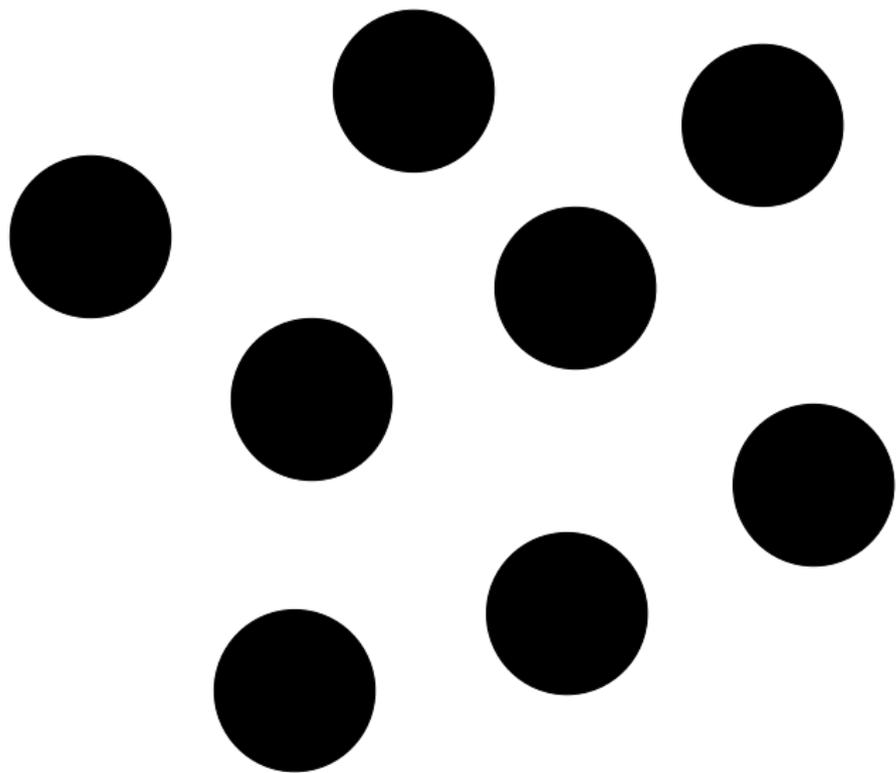
Dimension

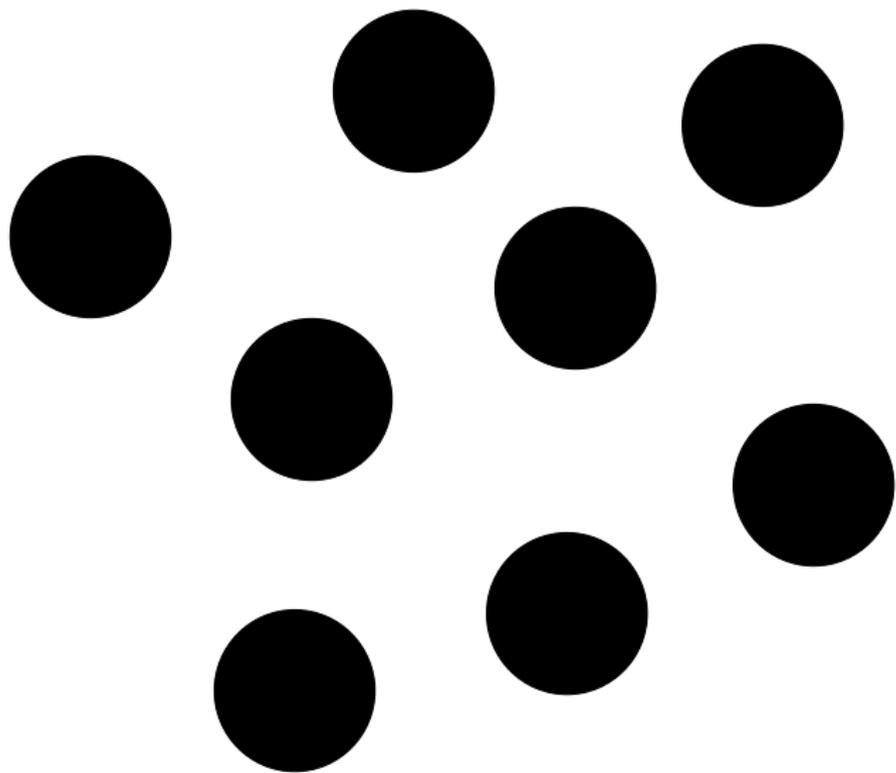
Additionssysteme

Multiplikation

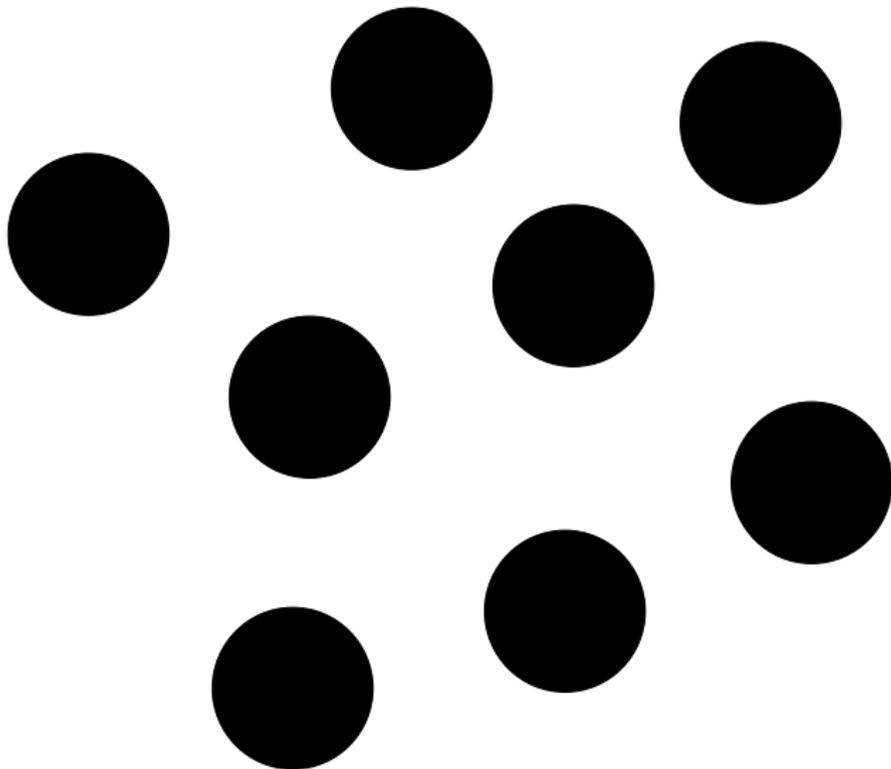
Abschluss und Zusammenfassung







Wieviele Kugeln waren es diesmal ?



## Kleiner Test

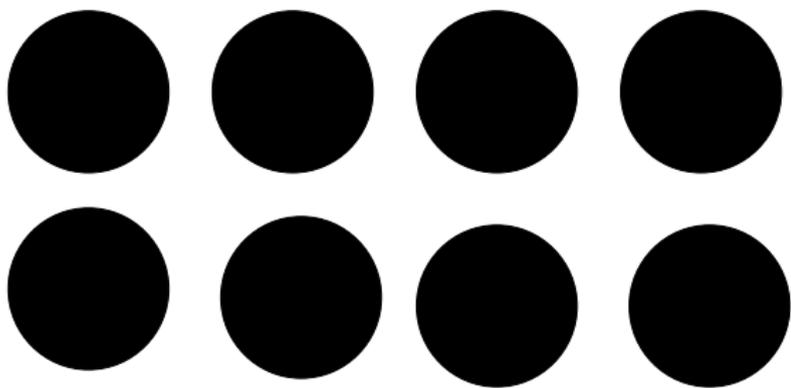
Basen

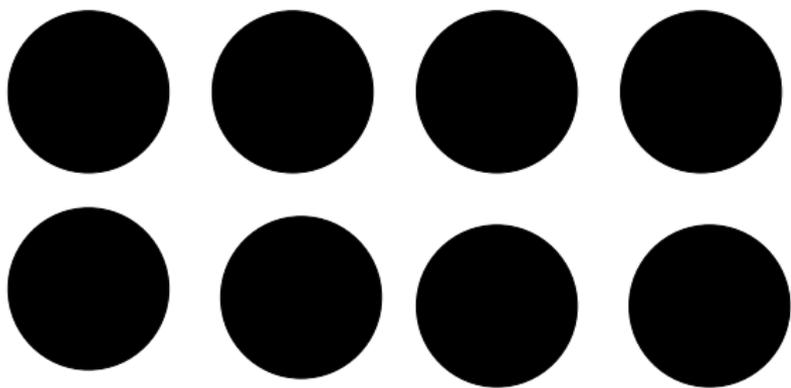
Dimension

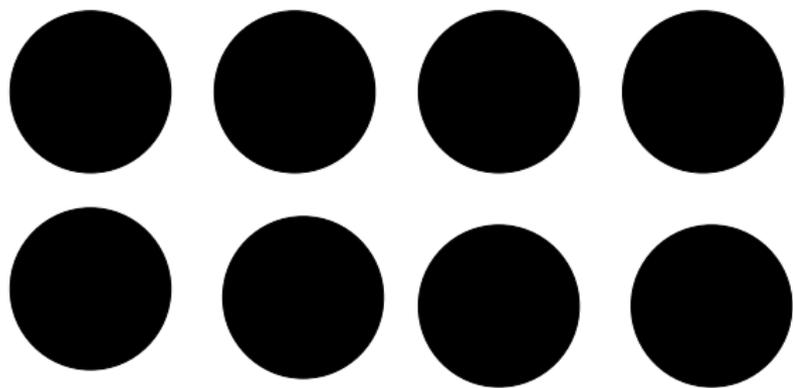
Additionssysteme

Multiplikation

Abschluss und Zusammenfassung







Wieviele Kugeln waren es jetzt ?

## Kleiner Test

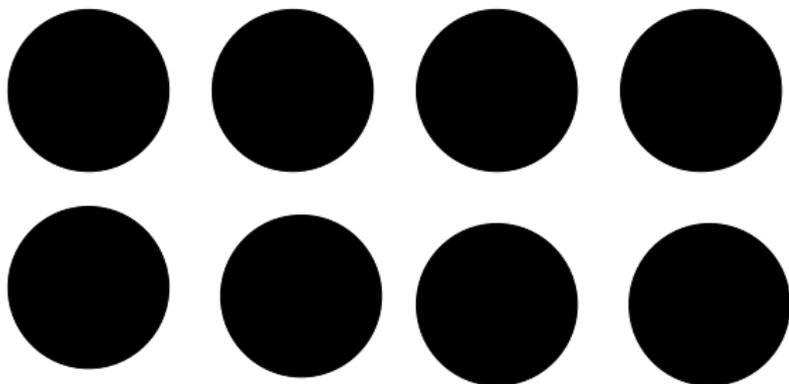
Basen

Dimension

Additionssysteme

Multiplikation

Abschluss und Zusammenfassung



## Kleiner Test

Basen

Dimension

Additionssysteme

Multiplikation

Abschluss und Zusammenfassung

## Zahlenauffassung ist beschränkt

Zahlenauffassung ist beschränkt

Mengen mit vier Items können nur durch zählen bestimmt werden

Zahlenauffassung ist beschränkt

Mengen mit vier Items können nur durch zählen bestimmt werden

Bündelung bzw. Zerlegung als Hilfsmittel

Kleiner Test  
Basen  
Dimension  
Additionssysteme  
Multiplikation  
Abschluss und Zusammenfassung

Dezimalsystem  
Quintalsystem  
Binärsystem  
Euklids Algorithmus  
Aufgaben I

## Das Dezimalsystem

## Das Dezimalsystem

Zehn Grundziffern 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

## Das Dezimalsystem

Zehn Grundziffern 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

Benutzen wir im Alltag



## Das Quintalsystem

# Das Quintalsystem

## Fünf Grundziffern 0,1,2,3,4

## Das Quintalsystem

Fünf Grundziffern 0,1,2,3,4

z.B.  $17_{10} = 32_5$

# Das Binärsystem

## Das Binärsystem

Zwei Grundziffern 0 und 1

## Das Binärsystem

Zwei Grundziffern 0 und 1

z.B.  $17_{10} = 10001_2$

## Das Binärsystem

Zwei Grundziffern 0 und 1

z.B.  $17_{10} = 10001_2$

Computer

## Das Binärsystem

Zwei Grundziffern 0 und 1

z.B.  $17_{10} = 10001_2$

Computer an/aus

## Von Dezimal nach Quintal

## Von Dezimal nach Quintal

$$121 : 5 = 24 \text{ Rest } 1$$

## Von Dezimal nach Quintal

$$121 : 5 = 24 \text{ Rest } 1$$

$$24 : 5 = 4 \text{ Rest } 4$$

## Von Dezimal nach Quintal

$$121 : 5 = 24 \text{ Rest } 1$$

$$24 : 5 = 4 \text{ Rest } 4$$

$$4 : 5 = 0 \text{ Rest } 4$$

## Von Dezimal nach Quintal

$$121 : 5 = 24 \text{ Rest } 1$$

$$24 : 5 = 4 \text{ Rest } 4$$

$$4 : 5 = 0 \text{ Rest } 4$$

Die *Reste* werden von unten nach oben gelesen

## Von Dezimal nach Quintal

$$121 : 5 = 24 \quad \text{Rest } 1$$

$$24 : 5 = 4 \quad \text{Rest } 4$$

$$4 : 5 = 0 \quad \text{Rest } 4$$

Die *Reste* werden von unten nach oben gelesen

$$121_{10} = 441_5$$

## Von Dezimal nach Binär

## Von Dezimal nach Binär

$$121 : 2 = 60 \text{ Rest } 1$$

## Von Dezimal nach Binär

$$121 : 2 = 60 \quad \text{Rest } 1$$

$$60 : 2 = 30 \quad \text{Rest } 0$$

## Von Dezimal nach Binär

$$121 : 2 = 60 \quad \text{Rest } 1$$

$$60 : 2 = 30 \quad \text{Rest } 0$$

$$30 : 2 = 15 \quad \text{Rest } 0$$

## Von Dezimal nach Binär

$$121 : 2 = 60 \quad \text{Rest } 1$$

$$60 : 2 = 30 \quad \text{Rest } 0$$

$$30 : 2 = 15 \quad \text{Rest } 0$$

$$15 : 2 = 7 \quad \text{Rest } 1$$

## Von Dezimal nach Binär

$$121 : 2 = 60 \quad \text{Rest } 1$$

$$60 : 2 = 30 \quad \text{Rest } 0$$

$$30 : 2 = 15 \quad \text{Rest } 0$$

$$15 : 2 = 7 \quad \text{Rest } 1$$

$$7 : 2 = 3 \quad \text{Rest } 1$$

## Von Dezimal nach Binär

$$121 : 2 = 60 \text{ Rest } 1$$

$$60 : 2 = 30 \text{ Rest } 0$$

$$30 : 2 = 15 \text{ Rest } 0$$

$$15 : 2 = 7 \text{ Rest } 1$$

$$7 : 2 = 3 \text{ Rest } 1$$

$$3 : 2 = 1 \text{ Rest } 1$$

## Von Dezimal nach Binär

$$121 : 2 = 60 \text{ Rest } 1$$

$$60 : 2 = 30 \text{ Rest } 0$$

$$30 : 2 = 15 \text{ Rest } 0$$

$$15 : 2 = 7 \text{ Rest } 1$$

$$7 : 2 = 3 \text{ Rest } 1$$

$$3 : 2 = 1 \text{ Rest } 1$$

$$1 : 2 = 0 \text{ Rest } 1$$

## Von Dezimal nach Binär

$$121 : 2 = 60 \quad \text{Rest } 1$$

$$60 : 2 = 30 \quad \text{Rest } 0$$

$$30 : 2 = 15 \quad \text{Rest } 0$$

$$15 : 2 = 7 \quad \text{Rest } 1$$

$$7 : 2 = 3 \quad \text{Rest } 1$$

$$3 : 2 = 1 \quad \text{Rest } 1$$

$$1 : 2 = 0 \quad \text{Rest } 1$$

$$121_{10} = 1111001_2$$

## Von Dezimal ins 60er System

## Von Dezimal ins 60er System

$$121 : 60 = 2 \text{ Rest } 1$$

## Von Dezimal ins 60er System

$$121 : 60 = 2 \text{ Rest } 1$$

$$2 : 60 = 0 \text{ Rest } 2$$

## Von Dezimal ins 60er System

$$121 : 60 = 2 \text{ Rest } 1$$

$$2 : 60 = 0 \text{ Rest } 2$$

$$121_{10} = 21_{60}$$

$$121_{10} = 441_5$$

$$121_{10} = 1111001_2$$

$$121_{10} = 21_{60}$$

$$121_{10} = 441_5$$

$$121_{10} = 1111001_2$$

$$121_{10} = 21_{60}$$

die Anzahl der Stellen ist abhängig von der Basis

## Aufgaben zum Selberrechnen I

Kleiner Test

Basen

**Dimension**

Additionssysteme

Multiplikation

Abschluss und Zusammenfassung

Eindimensionale Zahlensysteme

Zweidimensionale Zahlensysteme

# Eindimensional

Eindimensional

z.B. zählen mit Hilfe von Steinen

Eindimensional

z.B. zählen mit Hilfe von Steinen

lineares, einfaches System

Eindimensional

z.B. zählen mit Hilfe von Steinen

lineares, einfaches System

Vorteil:

Eindimensional

z.B. zählen mit Hilfe von Steinen

lineares, einfaches System

Vorteil:

Keine Kenntnisse über Arithmetik nötig

Eindimensional

z.B. zählen mit Hilfe von Steinen

lineares, einfaches System

Vorteil:

Keine Kenntnisse über Arithmetik nötig

Nachteil:

Eindimensional

z.B. zählen mit Hilfe von Steinen

lineares, einfaches System

Vorteil:

Keine Kenntnisse über Arithmetik nötig

Nachteil:

lange Zahlendarstellung

Kleiner Test

Basen

**Dimension**

Additionssysteme

Multiplikation

Abschluss und Zusammenfassung

Eindimensionale Zahlensysteme

Zweidimensionale Zahlensysteme

## Zweidimensionale Zahlensysteme

# Zweidimensionale Zahlensysteme

## Basis-Dimension

## Zweidimensionale Zahlensysteme

### Basis-Dimension

z.B. Dezimalsystem die 10

## Zweidimensionale Zahlensysteme

### Basis-Dimension

z.B. Dezimalsystem die 10

### Power-Dimension

## Zweidimensionale Zahlensysteme

### Basis-Dimension

z.B. Dezimalsystem die 10

### Power-Dimension

z.B.  $43 = 4 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$

## Zweidimensionale Zahlensysteme

### Basis-Dimension

z.B. Dezimalsystem die 10

### Power-Dimension

z.B.  $43 = 4 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$

Zahlen polynomial darstellbar

## Zweidimensionale Zahlensysteme

### Basis-Dimension

z.B. Dezimalsystem die 10

### Power-Dimension

z.B.  $43 = 4 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$

Zahlen polynomial darstellbar

Auch größere Zahlen gut darstellbar

Kleiner Test

Basen

Dimension

**Additionssysteme**

Multiplikation

Abschluss und Zusammenfassung

ägyptisches Zahlensystem

Römisches Zahlensystem

Aufgaben II



1



1

10



▶	1
▶ n	10
▶ e	100



▶	1
▶ ∩	10
▶ e	100
▶ 	1.000



▶		1
▶		10
▶		100
▶		1.000
▶		10.000



▶		1
▶		10
▶		100
▶		1.000
▶		10.000
▶		100.000



▶		1
▶		10
▶		100
▶		1.000
▶		10.000
▶		100.000
▶		1.000.000

1	𐎠	10	𐎡	100	𐎢	1000	𐎣
2	𐎠𐎠	20	𐎡𐎡	200	𐎢𐎢	2000	𐎣𐎣
3	𐎠𐎠𐎠	30	𐎡𐎡𐎡	300	𐎢𐎢𐎢	3000	𐎣𐎣𐎣
4	𐎠𐎠𐎠𐎠	40	𐎡𐎡𐎡𐎡	400	𐎢𐎢𐎢𐎢	4000	𐎣𐎣𐎣𐎣
5	𐎡	50	𐎢	500	𐎣	5000	𐎤
6	𐎢	60	𐎣	600	𐎤	6000	𐎥
7	𐎣	70	𐎤	700	𐎥	7000	𐎦
8	𐎤	80	𐎥	800	𐎦	8000	𐎧
9	𐎥	90	𐎦	900	𐎧	9000	𐎨

Hieratische Zahlen

ägyptische Alltagsschrift

Abbildung 1

## Römisches Zahlen

<b>1</b>	<b>5</b>	<b>10</b>	<b>50</b>	<b>100</b>	<b>500</b>	<b>1000</b>
<b>I</b>	<b>V</b>	<b>X</b>	<b>L</b>	<b>C</b>	<b>D</b>	<b>M</b>

Römisches Zahlen

**1   5   10   50   100   500   1000**

**I   V   X   L   C   D   M**

Nachteil:

## Römisches Zahlen

**1   5   10   50   100   500   1000**

**I   V   X   L   C   D   M**

Nachteil: Keine einheitliche Zahlendarstellung



## Römische Multiplikation

z.B. **XIII · XVII**

## Römische Multiplikation

z.B. **XIII · XVII**  
**XIII**

## Römische Multiplikation

z.B. XIII · XVII

XIII

XIII    I

## Römische Multiplikation

z.B. **XIII** · **XVII**

**XIII**

**XIII**    **I**

**XIII**    **I**

## Römische Multiplikation

z.B. XIII · XVII

XIII

XIII    I

XIII    I

LVVV    V

## Römische Multiplikation

z.B. XIII · XVII

XIII

XIII I

XIII I

LVVV V

CXXX X

## Römische Multiplikation

z.B. XIII · XVII

XIII

XIII    I

XIII    I

LVVV    V

CXXX    X

XIII · XVII = CCXXI



Kleiner Test

Basen

Dimension

**Additionssysteme**

Multiplikation

Abschluss und Zusammenfassung

ägyptisches Zahlensystem

Römisches Zahlensystem

**Aufgaben II**

## Aufgaben zum Selberrechnen

# Multiplikation

# Multiplikation

## Sechs Schritte

## Multiplikation

Sechs Schritte

Informationen entweder external oder internal

## Multiplikation

Sechs Schritte

Informationen entweder external oder internal

External: Wissen aus der Umgebung, durch Wahrnehmung

## Multiplikation

### Sechs Schritte

Informationen entweder external oder internal

External: Wissen aus der Umgebung, durch Wahrnehmung

Internal: Wissen aus Gedächtnis

## Multiplikation

### Sechs Schritte

Informationen entweder external oder internal

External: Wissen aus der Umgebung, durch Wahrnehmung

Internal: Wissen aus Gedächtnis

→ je mehr internale Abrufe nötig, desto schwieriger, da höhere Anforderung an kognitive Leistung

Ägyptisch:  $\text{nn} \cdot \text{|||||}$       Arabisch:  $20 \cdot 7$

Ägyptisch:  $\text{oo} \cdot \text{|||||}$       Arabisch:  $20 \cdot 7$

1. Schritt:

Ägyptisch:  $\text{nn} \cdot \text{|||||}$       Arabisch:  $20 \cdot 7$

1. Schritt:  
Trennen von Potenz-  
&  
Basis- Dimension

External trennbar

External trennbar

2a.Schritt:

2a.Schritt:

Finden des Basis Wertes    External: Mengen    Internal: Formen

## 2a.Schritt:

Finden des Basis Wertes	External: Mengen	Internal: Formen
	$B(\cap\cap) = \ \ $	$B(20) = 2$
	$B(\ \ \ \ \ \ \ \ ) = \ \ \ \ \ \ $	$B(7) = 7$

2b.Schritt:

2b.Schritt:

Multiplizieren  
der Basis Werte

Internal:  
Multiplikationstafeln

Internal:  
Multiplikationstafeln

2b.Schritt:

Multiplizieren  
der Basis Werte

Internal:  
Multiplikationstafeln

$$|| \cdot ||||| = \cap |||$$

Internal:  
Multiplikationstafeln

$$2 \cdot 7 = 14$$

3a.Schritt:

3a.Schritt:

Finden der Potenz Werte   Internal: Formen   External: Position

3a.Schritt:

Finden der Potenz Werte

Internal: Formen

External: Position

$$P(\text{nn}) = 1$$

$$P(20) = 1$$

$$P(\text{|||||}) = 0$$

$$P(7) = 0$$

3b.Schritt:

3b.Schritt:

Addieren  
der Potenz Werte

Internal:  
Additionstabeln

External:  
Positionen

3b.Schritt:

Addieren  
der Potenz Werte

Internal:  
Additionstafeln

$$\begin{aligned} & P(n \cdot |||||) \\ &= P(n) + P(|||||) \\ &= 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

External:  
Positionen

$$\begin{aligned} & P(20 \cdot 7) \\ &= P(20) + P(7) \\ &= 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

4.Schritt:

4.Schritt:

Zusammenfügen  
der Potenz Werte

Internal: Formen

External: Position

#### 4.Schritt:

Zusammenfügen  
der Potenz Werte

Internal: Formen

External: Position

$$\begin{aligned} & \text{oo} \cdot \text{|||||} \\ & = (\text{o||||}) \cdot 10^1 \\ & = \text{oo} \text{oo} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 20 \cdot 7 \\ & = 14 \cdot 10^1 \\ & = 140 \end{aligned}$$

## Warum das arabische Zahlensystem so geschickt ist

Warum das arabische Zahlensystem so geschickt ist

- ▶ Über Jahrtausende intuitiv entwickelt

## Warum das arabische Zahlensystem so geschickt ist

- ▶ Über Jahrtausende intuitiv entwickelt
- ▶ Nur 10 Symbole

## Warum das arabische Zahlensystem so geschickt ist

- ▶ Über Jahrtausende intuitiv entwickelt
- ▶ Nur 10 Symbole
- ▶ Eindeutig

## Warum das arabische Zahlensystem so geschickt ist

- ▶ Über Jahrtausende intuitiv entwickelt
- ▶ Nur 10 Symbole
- ▶ Eindeutig
- ▶ Kompakt

## Warum das arabische Zahlensystem so geschickt ist

- ▶ Über Jahrtausende intuitiv entwickelt
- ▶ Nur 10 Symbole
- ▶ Eindeutig
- ▶ Kompakt
- ▶ Rechenregeln leicht zu lernen

## Warum das arabische Zahlensystem so geschickt ist

- ▶ Über Jahrtausende intuitiv entwickelt
- ▶ Nur 10 Symbole
- ▶ Eindeutig
- ▶ Kompakt
- ▶ Rechenregeln leicht zu lernen
- ▶ Insgesamt weniger kognitive Ressourcen nötig als in anderen Systemen

## Literaturverzeichnis

- ▶ Zhang, J.; & Norman, D.A. (1995). A representational analysis of numeration systems.  
Aus: Cognition, 57, S. 271-295
- ▶ Nickerson, R.S. (1988). Counting, computing, and the representation of numbers.  
Aus: Human factors, 30, S. 181-199
- ▶ Ifrah, G. (1992). Die Zahlen: Die Geschichte einer großen Erfindung. Frankfurt: Campus  
Kapitel 1: Die Vorgeschichte der Zahlen (S. 17-25)  
Kapitel 2: Wie der Mensch zählen lernte (S. 26-44)  
Kapitel 3: Die Erfindung der Zahlssysteme (S. 45-61)  
Kapitel 9: Indien: Die Wiege der modernen Zahlschrift (S.192-211)

## Abbildungsverzeichnis

- ▶ Abbildung 1

Quelle:

<http://www.fonline.de/rs-eps/geschichte/ges1.htm>

- ▶ Abbildung 2

Quelle:

Ifrah, G. (1998). Universalgeschichte der Zahlen.

Köln: Parkland