60 Einführende Aufgaben in die Stochastik

S.Frank

Juli 2007

60 Einführende Aufgaben in die Stochastik

Modul 1
20 Einführende Aufgaben in die Stochastik
zum Bereich Mengen, Schreibweisen, Modellbildung, Laplaceverteilung

Aufgabe 1
Ein normaler 6-seitiger Würfel wird einmal geworfen. Geben Sie die folgenden Ereignisse in Mengenschreibweise an:

(a) A: Die Augenzahl ist gerade.

(b) B: Die Augenzahl ist ungerade.

(c) C: Die Augenzahl ist größer als 6.

(d) D: Die Augenzahl ist keine 5.

(e) E: Die Augenzahl ist eine Quadratzahl.

(f) F: Die Augenzahl ist eine Primzahl.

Aufgabe 2
Ein Würfel wird zweimal geworfen. Geben Sie die folgenden Ereignisse in Mengenschreibweise an:

(a) A: Die Augensumme ist 7.

(b) B: Die Augensumme ist eine Primzahl.

(c) C: Die Augensumme ist eine Quadratzahl und ungerade.

(d) D: Das Produkt der Augenzahlen ist eine Quadratzahl.

Aufgabe 3
Ein normaler 6-seitiger Würfel wird einmal geworfen. Geben Sie die folgenden Ereignisse in Mengenschreibweise an:

(a) A: Die Augenzahl ist durch zwei teilbar.

(b) B: Die Augenzahl ist durch drei teilbar.

(c) C: Die Augenzahl ist keine Primzahl.

(d) Bestimmen Sie $A \cap B, A \cap C$, und $B \cap C$.

(e) Bestimmen Sie $A \cup B, A \cup C$, und $B \cup C$.

(f) Bestimmen Sie $\bar{A}, \bar{B}, \Omega \backslash C, \overline{A \cap B}, \overline{B \cap C}$, sowie $\bar{A} \cap \bar{B}$.

Aufgabe 4
Gegeben sei ein Grundraum Ω , ein Wahrscheinlichkeitsmaß P : $\mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0,1]$ und zufällige Ereignisse $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ mit P(A) = 0.7, P(B) = 0.6 und $P(A \cap B) = 0.5$.
Berechnen Sie :

(a) $P(A \cup B)$

(b) $P(\bar{A})$

(c) $P(\bar{B})$

(d) $P(\bar{A} \cup \bar{B})$

(e) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

(f) $P(A \cap \bar{B})$

(g) $P(\bar{A} \cap B)$

(h) $P[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)]$

Aufgabe 5
Gegeben sei ein Grundraum Ω , ein Wahrscheinlichkeitsmaß P : $\mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0,1]$ und zufällige Ereignisse $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ mit P(A) = 0.6, P(B) = 0.4 und $P(A \cap B) = 0.2$.
Berechnen Sie :

(a) $P(A \cup B)$

(b) $P(\bar{A})$

(c) $P(\bar{B})$

(d) $P(\bar{A} \cup \bar{B})$

(e) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

(f) $P(A \cap \bar{B})$

(g) $P(\bar{A} \cap B)$

(h) $P[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)]$

Aufgabe 6
Gegeben sei ein Grundraum Ω , ein Wahrscheinlichkeitsmaß P : $\mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0,1]$
und zufällige Ereignisse $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ mit P(A) = 0.8 , P(B) = 0.5
und $P(A \cap B) = 0.4$.
Berechnen Sie :

(a) $P(A \cup B)$

(b) $P(\bar{A})$

(c) $P(\bar{B})$

(d) $P(\bar{A} \cup \bar{B})$

(e) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

(f) $P(A \cap \bar{B})$

(g) $P(\bar{A} \cap B)$

(h) $P[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)]$

Aufgabe 7

Beweisen Sie das de Morgansche Gesetz.

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

Aufgabe 8
An einem Computer, dessen Tastatur die 26 Tasten für die kleinen Buchstaben (a,b,c ... z) hat, sitzt ein Nutzer (User) und tippt zufällige auf den Tasten herum. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dass er das Wort “passwort” tippt?

Aufgabe 9
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die vierstellige Zahl, die entsteht wenn die Ziffern 1,3,5 und 9 in zufälliger und jeweils verschiedene Reihenfolge notiert werden, durch 3,6 und 9 teilbar ist?

Aufgabe 10
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die vierstellige Zahl, die entsteht wenn die Ziffern 3,5,7 und 9 in zufälliger und jeweils verschiedene Reihenfolge notiert werden, durch 3,5 und 9 teilbar ist?

Aufgabe 11
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die fünfstellige Zahl, die entsteht wenn die Ziffern 2,3,4,5 und 6 in zufälliger und jeweils verschiedene Reihenfolge notiert werden, durch 2,3 und 4 teilbar ist?

Aufgabe 12
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die fünfstellige Zahl, die entsteht wenn die Ziffern 0,1,2,3 und 4 in zufälliger und jeweils verschiedene Reihenfolge notiert werden, durch 4,5 und 8 teilbar ist?

Aufgabe 13
Um die Vergabe der Benutzernamen gerechter zu gestallten, wird nicht mehr die Nachname als Benutzername vergeben, sondern eine siebenstellige Zahl. Die Zahl enthält in zufälliger Reihenfolge die Ziffern 2,3,4,5,6,7,8. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die so entstanden Zahlen durch 2,3,4 und 5 teilbar sind?

Aufgabe 14
Sie spielen ein bekanntes Würfelspiel, mit fünf Würfeln. Wie wahrscheinlich ist es, daß Sie mindestens vier Sechsen gewürfelt haben? Geben Sie das Modell vollständig an.

Aufgabe 15
Angeblich soll Chevalier de Mèrè im Jahre 1654 Blaise Pascal folgendes Problem gestellt haben:
Stimmt die Chance, in vier Würfen eines Würfels eine Sechs zu werfen, mit der Chance überein, in 24 Würfen zweier Würfel mindestens eine Doppelsechs zu werfen?

a) Berechnen Sie die beiden Wahrscheinlichkeiten.

b) Welche ist grösser?

Aufgabe 16
Sie würfeln zweimal mit einem fairen Würfel. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt die Augensumme 7 auf?

Aufgabe 17
Anstelle mit einem Würfel zweimal zu würfeln, würfeln Sie diesmal mit zwei nicht unterscheidbaren Würfel gleichzeitig. Warum irrte sich Leibnitz, als er glaubte, daß beim Werfen mit zwei nicht unterscheidbare Würfel die Augensummen 11 und 12 mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftreten?

Aufgabe 18
Sie würfeln einmal mit fünf Würfeln. Wie wahrscheinlich ist es, daß Sie fünf aufeinander folgende Zahlen gewürfelt haben? Geben Sie das Modell vollständig an.

Aufgabe 19
Geben Sie einen geeigneten Grundraum an, und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß beim viermaligen Werfen eines Würfels.

a) das Maximum der erhaltenen Augenzahlen kleiner oder gleich 4 ist,

b) das Maximum der erhaltenen Augenzahlen gleich 4 ist,

c) das Minimum der erhaltenen Augenzahlen kleiner oder gleich 4 ist.

Aufgabe 20
Sie würfeln mit vier Würfeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit vier verschiedene Augenzahlen zu erhalten?

Modul 2
20 Einführende Aufgaben in die Stochastik
zum Bereich Mächtigkeit, Urnen, Kombinatorik, stochastische Unabhängigkeit

Aufgabe 21
Wie viele verschiedene “Wörter” lassen sich durch Umstellen der Buchstaben aus den Wörtern

a. Mississippi,

b. Larissa,

c. Stuttgart,

d. Abrakadabra,

e. Thorsten,

f. Matthias bilden?

Aufgabe 22
Aus einer Urne mit 4 Kugeln werden 3 gezogen. Geben Sie die entsprechenden Grundräume an, wenn die Ziehung durch

(a) Ziehen mit Zurücklegen und mit Beachtung der Reihenfolge

(b) Ziehen ohne Zurücklegen und mit Beachtung der Reihenfolge

(c) Ziehen ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge

(d) Ziehen mit Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge

erfolgt. Ermitteln Sie die jeweilige Mächtigkeiten.

Aufgabe 23
i) Aus einer Urne mit 5 Kugeln werden 2 gezogen.
ii)Aus einer Urne mit 5 Kugeln werden 4 gezogen.
iii)Aus einer Urne mit 6 Kugeln werden 3 gezogen.
iv)Aus einer Urne mit 6 Kugeln werden 2 gezogen.

Geben Sie die entsprechenden Grundräume an, wenn die Ziehung durch

(a) Ziehen mit Zurücklegen und mit Beachtung der Reihenfolge

(b) Ziehen ohne Zurücklegen und mit Beachtung der Reihenfolge

(c) Ziehen ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge

(d) Ziehen mit Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge

erfolgt. Ermitteln Sie die jeweilige Mächtigkeiten.

Aufgabe 24
Aus einer Urne mit 1 roten und 1 schwarzen Kugel und aus einer Urne mit 1 roten und 1 schwarzen Kugel werden gleichzeitig und rein zufällig je eine Kugel gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die gezogenen Kugeln die gleiche Farbe besitzen?

Aufgabe 25
a) Aus einer Urne mit 2 roten und 1 schwarzen Kugeln und aus einer Urne mit 1 roten und 1 schwarzen Kugel ...
b) Aus einer Urne mit 2 roten und 1 schwarzen Kugel und aus einer Urne mit 1 roten und 2 schwarzen Kugeln ...
c) Aus einer Urne mit 4 roten und 4 schwarzen Kugeln und aus einer Urne mit 3 roten, 3 weißen und 3 schwarzen Kugeln...
... werden gleichzeitig und rein zufällig je eine Kugel gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die gezogenen Kugeln die gleiche Farbe besitzen?

Aufgabe 26
Aus einer Urne mit 2 roten und 2 schwarzen Kugeln werden nacheinander 3 Kugeln entnommen, wobei jede mögliche Auswahl von 3 Kugel die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen soll. A_k bezeichen das Ereignis, dass sich unter diesen 3 Kugeln genau k rote Kugeln befinden (k = 0,1,2,3).
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dieser Ereignisse, wenn

(a) die jeweils entnommene Kugel wieder zurückgelegt wird,

(b) die entnommenen Kugeln nicht zurückgelegt werden.

Aufgabe 27
Aus einer Urne mit 2 roten und 2 schwarzen Kugeln werden nacheinander 2 Kugeln entnommen, wobei jede mögliche Auswahl von 2 Kugeln die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen soll. A_k bezeiche das Ereignis, dass sich unter diesen 2 Kugeln genau k rote Kugeln befinden (k = 0,1,2).
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dieser Ereignisse, wenn

(a) die jeweils entnommene Kugel wieder zurückgelegt wird,

(b) die entnommenen Kugeln nicht zurückgelegt werden.

Aufgabe 28
Aus einer Urne mit 2 roten und 4 schwarzen Kugeln werden nacheinander 3 Kugeln entnommen, wobei jede mögliche Auswahl von 3 Kugeln die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen soll. A_k bezeiche das Ereignis, dass sich unter diesen 3 Kugeln genau k rote Kugeln befinden (k = 0,1,2,3).
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dieser Ereignisse, wenn

(a) die jeweils entnommene Kugel wieder zurückgelegt wird,

(b) die entnommenen Kugeln nicht zurückgelegt werden.

Aufgabe 29
Aus einer Urne mit 3 roten und 4 schwarzen Kugeln werden nacheinander 3 Kugeln entnommen, wobei jede mögliche Auswahl von 3 Kugeln die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen soll. A_k bezeiche das Ereignis, dass sich unter diesen 3 Kugeln genau k rote Kugeln befinden (k = 0,1,2,3).
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dieser Ereignisse, wenn

(a) die jeweils entnommene Kugel wieder zurückgelegt wird,

(b) die entnommenen Kugeln nicht zurückgelegt werden.

Aufgabe 30
Aus einer Urne mit 3 roten und 4 schwarzen Kugeln werden nacheinander 3 Kugeln entnommen, wobei jede mögliche Auswahl von 3 Kugeln die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen soll. A_k bezeiche das Ereignis, dass sich unter diesen 3 Kugeln genau k schwarze Kugeln befinden (k = 0,1,2,3).
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dieser Ereignisse, wenn

(a) die jeweils entnommene Kugel wieder zurückgelegt wird,

(b) die entnommenen Kugeln nicht zurückgelegt werden.

Aufgabe 31
Aus einer Urne mit 2 roten und 5 schwarzen Kugeln werden nacheinander 3 Kugeln entnommen, wobei jede mögliche Auswahl von 3 Kugel die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen soll. A_k bezeiche das Ereignis, dass sich unter diesen 3 Kugeln genau k rote Kugeln befinden (k = 0,1,2,3).
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dieser Ereignisse, wenn

(a) die jeweils entnommene Kugel wieder zurückgelegt wird,

(b) die entnommenen Kugeln nicht zurückgelegt werden.

Wie verändern sich die Wahrscheinlichkeiten, wenn sich in der Urne 4 rote und 10 schwarze Kugeln befinden?

Aufgabe 32
Wie zu Beginn jedes Semsters steht man auch in diesem vor dem Problem, das manche Übungstermine beliebter sind als andere. Um die Zuteilung zu den einzeln Gruppe so gerecht wie möglich zu gestalten werden die Studtent/innen zufällig den Gruppe zugeordnet. Dabei stellt sich die folgende Frage, wie viele mögliche Arten der Zuteilung gibt es, und macht es einen Unterschied ob die Gruppen unterscheidbar sind oder nicht? Auf wieviele Arten kann man 40 Student/innen in vier Übungsgruppen mit je zehn Personen einteilen, wenn die Gruppen

a) unterscheidbar sind?

b) nicht unterscheidbar sind?

Aufgabe 33
Eine Urne enthält 20 weiße und 10 schwarze Kugeln. Es wird eine Kugel zufällig herausgezogen und ihre Farbe notiert. Anschließend wird sie zusammen mit 5 weiteren Kugeln von derselben Farbe wieder in die Urne zurückgelegt. Dieses Verfahren wird 5 mal wiederholt. Bestimmen Sie mit Hilfe der Multiplikationsformel die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei allen 5 Ziehungen eine weiße Kugel entnommen wird.

Aufgabe 34
Das Kartenspiel Skat wird zu dritt mit 32 Karten gespielt, dabei erhält jeder der drei Spieler zu beginn 10 Karten, die 2 überzähligen Karten bilden den Stock bzw. Skat. Da die Buben/Bauern beim normalen Spiel die obersten Trümpfe bilden und beim sog. reizen wichtig sind, ist es vorteilhaft wenn man wüßte wie sie verteilt sind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält

1. Spieler 1 genau zwei Buben ?

2. jeder der Spieler genau einen Buben ?

Aufgabe 35
Bei der alten Variante des Fußballtoto der 11er–Wette musste man bei 11 Spielen jeweils eine 0,1 oder 2 tippen. Inzwischen gibt es die 13er–Wette bei der bei 13 Spielen jeweils eine 0,1 oder 2 getippt werden.

a) Wie viele verschiedene Tippreihen gab es bei der 11er–Wette,

b) und wie viele gibt es bei der 13er–Wette?

Aufgabe 36
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mit einem Spielfeld, beim 6 aus 49 Lotto sechs Richtige (ohne Berücksichtigung der Zusatzzahl) zu haben?

Aufgabe 37
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mit einem Spielfeld, bei der TOTO 6 aus 45 Auswahlwette drei Richtige (ohne Berücksichtigung der Zusatzzahl) zu haben?

Aufgabe 38
Wie groß ist die die Wahrscheinlichkeit mit einem Spielfeld,

a) überhaupt einen Gewinn beim 6 aus 49 Zahlenlotto,

b) bzw. bei der TOTO 6 aus 45 Auswahlwette zu erzielen?

Aufgabe 39
Ein fairer Würfel wird dreimal hintereinander geworfen. Es seien die folgenden Ergebnisse gegeben:

A = { der Wurf ist eine 6 }

B = { die Summe der Augenzahlen der ersten beiden Würfe ist gerade}

C = { mindestens eine der gewürfelten Augenzahlen ist eine 3}

Überprüfen Sie, ob die folgenden Mengen von Ereignissen unabhängig sind:

(a) A und B

(b) A und C

(c) B und C

(d) A, B und C

Aufgabe 40
Ein Würfel wird zweimal geworfen. Sind die folgenden Ereignisse stochastisch unabhängig, bzw. paarweise stochastisch unabhängig ?

A: Die Augenzahl beim ersten Wurf ist gerade.

B: Die Summe der beiden Augenzahlen ist gerade.

C: Beim zweiten Wurf fällt eine Primzahl.

Modul 3
20 Einführende Aufgaben in die Stochastik
zum Bereich bedingte Wahrscheinlichkeit, Erwartungswert und zentraler Grenzwertsatz

Aufgabe 41
Beim Drucken im Computer–Pool kommt es immer wieder zu einem Papierstau. Einer der Poolmgr hat rausgefunden das die Wahrscheinlichkeit einen Papierstau zu haben, abhängig, von den zu druckenden Dateien ist.
Er hat die Dateien in zwei Typen eingeteilt. Typ 1 sind pdf Dateien und Typ 2 sind ps Dateien. Aufgrund längere Beobachtungen ergab sich folgende Tabelle.

Datei Typ	Anteil an den Druckaufträgen (in %)	Papierstau (in %)
1	50 %	20 %
2	50 %	2 %

(a) Geben Sie für dieses Zufallsexperiment einen geeigneten Grundraum Ω an, und beschreiben Sie in diesem die Ereignisse

- A_i ... Die Datei ist vom Typ i (i = 1,2)
- B ... es gibt ein Papierstau

(b) Drücken Sie die in obiger Tabbelle angegebenen Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe des dazu gehörigen Wahrscheinlichkeitsmaßes $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0,1]$ und der Ereignisse A_1, A_2 und B aus

(c) Berechnen Sie P(B)

(d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Papierstau durch eine Datei vom Typ i verursacht wurde (i = 1,2) ?

Aufgabe 42
Im Pool wurde ein neuer Drucker aufgestellt und zusätzlich bessere Software installiert. Auch hat man rausgefunden, das nicht der Typ der Datei der Grund des Papierstaus war, sondern der jeweilige Lehrstuhl, aus dem die Datei stammt. Insgesamt gibt es drei Lehrstühle. Aufgrund dieser neuen Bedingungen ergab sich folgende Tabelle.

Typ	Anteil (in %)	Fehler (in %)
1	50	4
2	40	1.25
3	10	25

(a) Geben Sie für dieses Zufallsexperiment einen geeigneten Grundraum Ω an, und beschreiben Sie in diesem die Ereignisse

- A_i ... Die Datei stammt vom Lehrstuhl i (i = 1,2,3)
- B ... Es gibt einen Papierstau

(b) Drücken Sie die in obiger Tabbelle angegebenen Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe des dazu gehörigen Wahrscheinlichkeitsmaßes $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ und der Ereignisse A_1, A_2, A_3 und B aus

(c) Berechnen Sie P(B)

(d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Papierstau durch eine Datei vom Typ i verursacht wurde (i = 1,2,3) ?

Aufgabe 43
Aufgrund der schlechten Klausurergebnisse in der letzten Zeit, hat man sich über die Qualität der Übungen Gedanken gemacht.
Um herauszufinden ob es einen Zusammenhang, zwischen dem Besuch der Übungen und dem Bestehen der Klausuren gibt, hat man eine Umfrage unter den Studenten durchgeführt. Dabei ergab sich folgende Tabelle.
Studenten vom Typ 1 waren in der Übung, und Studenten vom Typ 2 waren nicht in der Übung.

Typ	Anteil (in %)	Durchgefallen (in %)
1	40	22.5
2	60	35

(a) Geben Sie für dieses Zufallsexperiment einen geeigneten Grundraum Ω an, und beschreiben Sie in diesem die Ereignisse

- A_i ... Der Student ist vom Typ i (i = 1,2)
- B ... ist durchgefallen

(b) Drücken Sie die in obiger Tabbelle angegebenen Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe des dazu gehörigen Wahrscheinlichkeitsmaßes $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ und der Ereignisse A_1, A_2 und B aus

(c) Berechnen Sie P(B)

(d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß einer vom Typ i durchgefallen ist (i = 1,2) ?

Aufgabe 44
Aufgrund des Ergebnisses der vorherigen Aufgabe gab es eine heftige Diskussion, darüber, ob es an den Übungen liegt, oder nicht doch davon abhängt, ob die Studenten die Übungsblätter abgegeben haben.
Zum Glück wurde dies bereits bei der ersten Umfrage miterhoben.
Studenten vom Typ 1 haben die Übungsblätter abgegeben, Studenten vom Typ 2 nicht.Es ergab sich folgende Tabelle.

Typ	Anteil (in %)	Durchgefallen (in %)
1	50	27
2	50	33

(a) Geben Sie für dieses Zufallsexperiment einen geeigneten Grundraum Ω an, und beschreiben Sie in diesem die Ereignisse

- A_i ... Der Student ist vom Typ i (i = 1,2)
- B ... ist durchgefallen

(b) Drücken Sie die in obiger Tabelle angegebenen Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe des dazu gehörigen Wahrscheinlichkeitsmaßes $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ und der Ereignisse A_1, A_2 und B aus

(c) Berechnen Sie P(B)

(d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß einer vom Typ i durchgefallen ist (i = 1,2) ?

Aufgabe 45
Insgesamt war man mit den Ergebnissen, der vorherigen Aufgaben nicht zufrieden.
Es blieb also nichts anderes übrig als die komplete Umfrage auszuwerten.
Diesmal ergaben sich 5 Typen von Studenten.
Typ 1 := selbstgemachte Aufgabenzettel und Übung
Typ 2 := abgeschrieben und ohne Besuch der Übung
Typ 3 := abgeschrieben und mit Besuch der Übung
Typ 4 := nix abgegeben und mit Besuch der Übung
Typ 5 := garnix
Es ergab sich dann die folgende Tabelle.

Typ	Anteil (in %)	Durchgefallen (in %)
1	10	15
2	20	37.5
3	20	22.5
4	10	30
5	40	33.75

(a) Geben Sie für diese Zufallsexperiment einen geeigneten Grundraum Ω an, und beschreiben Sie in diesem die Ereignisse

- A_i ... Der Student ist vom Typ i (i = 1,2,3,4,5)
- B ... ist durchgefallen

(b) Drücken Sie die in obiger Tabbelle angegebenen Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe des dazu gehörigen Wahrscheinlichkeitsmaßes $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0,1]$ und der Ereignisse A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 und B aus

(c) Berechnen Sie P(B)

(d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß einer vom Typ i durchgefallen ist (i = 1,2,3,4,5) ?

Aufgabe 46
Aufgrund des mangelnden Praxisbezugs des Informatik Studiums, wurden Projektarbeiten eingeführt und da man in der Industrie ja auch nicht allein arbeitet, wurden die Studenten in Teams zu je vier Studenten eingeteilt. Die Teams waren für die Arbeitsverteilung innerhalb der Gruppe selbst verantwortlich.
Bei dem hier betrachteten Team 1 "wir machen alle gleichviel", wurde es so geregelt, dass alle gleich viele der Codezeilen programmieren.
Es ergab sich folgende Tabelle.

Mitglied	Codeanteil (in %)	Fehler (in %)
1	25	15
2	25	18
3	25	9
4	25	18

Dem fertigen Code ist nicht mehr ansehen, von welchen Mitglied er programmiert wurde. Aus der Masse an Code wird rein zufällig eine Zeile herausgegriffen und auf Fehler überprüft.

(a) Geben Sie für dieses Zufallsexperiment einen geeigneten Grundraum Ω an, und beschreiben Sie in diesem die Ereignisse

- A_i ...Der Code wurde vom Mitglied i programmiert (i = 1,2,3,4)
- B ... Der Code ist fehlerhaft

(b) Drücken Sie die in obiger Tabbelle angegebenen Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe des dazu gehörigen Wahrscheinlichkeitsmaßes $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ und der Ereignisse A_1, A_2, A_3, A_4 und B aus

(c) Berechnen Sie P(B)

(d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein fehlerhafter Code von Mitglied i programmiert wurde (i = 1,2,3,4) ?

Aufgabe 47
Bei dem Software Projekt aus vorherigen Aufgabe gab es noch andere Teams. Bei dem jetzt betrachtetem Team 2 “jeder macht das was er am besten kann” ergab sich die folgende Tabelle.

Mitglied	Codeanteil (in %)	Fehler (in %)
1	20	1,25
2	20	2.5
3	20	5
4	40	1.875

Dem fertigen Code ist nicht mehr ansehen, von welchem Mitglied er programmiert wurde. Aus der Masse an Code wird rein zufällig eine Zeile herausgegriffen und auf Fehler überprüft.

(a) Geben Sie für dieses Zufallsexperiment einen geeigneten Grundraum Ω an, und beschreiben Sie in diesem die Ereignisse

- A_i ...Der Code wurde vom Mitglied i programmiert (i = 1,2,3,4)
- B ... Der Code ist fehlerhaft

(b) Drücken Sie die in obiger Tabelle angegebenen Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe des dazu gehörigen Wahrscheinlichkeitsmaßes $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ und der Ereignisse A_1, A_2, A_3, A_4 und B aus

(c) Berechnen Sie P(B)

(d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein fehlerhafter Code von Mitglied i programmiert wurde (i = 1,2,3,4) ?

Aufgabe 48
Mit zwei idealen Würfeln werde einmal gewürfelt.

(a) Beschreiben Sie die Ereignissein einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ und geben Sie deren Wahrscheinlichkeiten an:

- A ... Die Augensumme ist gerade
- B ... Die Augensumme ist durch 3 teilbar
- C ... Die Augensumme ist mind. 9 und kleiner 12

(b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(A|B), P(B|A), P(A|C), P(C|A), P(B|C), P(C|B), P(A|B \cap C)$ und $P(B|A \cap C)$

Aufgabe 49
Mit zwei idealen Würfeln werde einmal gewürfelt.

(a) Beschreiben Sie die Ereignisse in einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ und geben Sie deren Wahrscheinlichkeiten an:

- A ... Die Augensumme ist durch 2 teilbar
- B ... Die Augensumme ist durch 3 teilbar
- C ... Die Augensumme ist durch 4 teilbar

(b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(A|B), P(B|A), P(A|C), P(C|A), P(B|C), P(C|B), P(A|B \cap C)$ und $P(B|A \cap C)$

Aufgabe 50
Mit zwei idealen Würfeln werde einmal gewürfelt.

(a) Beschreiben Sie die Ereignisse in einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ und geben Sie deren Wahrscheinlichkeiten an:

- A ... Die Augensumme beträgt 7
- B ... Unter den Augenzahlen befindet sich keine '2' und keine '5'
- C ... Eine der Augenzahlen ist gerade, und die andere Augenzahl ist ungerade

(b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(A|B), P(B|A), P(A|C), P(C|A), P(B|C), P(C|B), P(A|B \cap C)$ und $P(B|A \cap C)$

(c) Überprüfen Sie, ob die folgenden Mengen von Ereignissen unabhängig sind:

i. A und B
ii. A und C
iii. B und C
iv. A,B und C

Aufgabe 51
Unser Team “wir machen alle gleichviel” (WMAG) hat sich nach dem entäuschenden Ergebniss beim Software Praktikum dafür entschieden etwas handfestes zu machen. Und sind nun dabei Computer zusammen zu schrauben. Leider fehlt ihnen auch hierbei das dafür notwendige Geschick, so daß im Durchschnitt 20% der Computer Ausschuss sind. Glücklicherweise gibt es eine elektronische Endkontrolle die mit Wahrscheinlichkeit 0.95 einen fehlerhaften Comupter erkennt, aber den Nachteil hat das sie mit Wahrscheinlichkeit 0.02 auch einen fehlerfreien Computer aussortiert.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Computer, der die Endkontrolle passiert, trotzdem fehlerhaft ist?

Aufgabe 52
Nach dem Erfolg vom Team WMAG beim Verkauf von Computern hat sich nun auch das Team “jeder macht das was er am besten kann” berufen gefühlt Computer zu produzieren und zu verkaufen. Im Mittel sind 5% der Computer defekt. Die hier verwendete Endkontrolle schlägt bei 96 $\%$ aller defekten und bei 2% aller funktionstüchtigen Computer Alarm. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Computer, bei dem der Test einen Fehler meldet, tatsächlich defekt?

Aufgabe 53
Bei der Flugplatz Party haben Sie die Wahl ob Sie 3 Euro Eintritt bezahlen, oder Sie würfeln den Eintrittspreis mit einem normalen Würfel.
Die Frage die sich dabei stellt ist, wie groß ist der Erwartungswert eines sechsseitigen fairen Würfels ?

Aufgabe 54
Thorsten ist ein begeisteter Fantasy-Abenteuer Spieler. Bei diesen Spielen werden auch Würfel benützt, aber diese unterscheiden sich deutlich von normalen Würfeln.

a. W_7 ist ein siebenseitiger Würfel, wobei die Augenzahlen aus der 1 und den ersten sechs Primzahlen bestehen

b. W_{12} ist ein zwölf seitiger Würfel, wobei die Augenzahlen die ersten zwölf ungeraden Zahlen sind

c. W_6 ist ein sechsseitiger Würfel, der $\{2, 4, 4, 6, 6, 6\}$ als Augenzahlen hat

Berechen Sie die jeweiligen Erwartungswerte.

Aufgabe 55
Um die allgemeine Popularität der Administratoren unter den Nutzern auszunützen und nebenbei auch noch Geld in die klamen Kassen zu spülen entschließt sich die Universität dazu Päckchen zu verkaufen. Jedes dieser Päckchen enthält jeweils eine der acht verschieden All-Time-Best-Ever Poolmgr als Plastikfigur. Einen anderen Grund die Päckchen zu kaufen gibt und braucht es auch nicht. Da keiner der Nutzer jemals wieder ein glückliches Leben führen kann wenn er nicht alle acht Figuren besitzt und niemand Figuren tauscht, stellt sich die Frage wie viele Packungen müssen Sie im Schnitt kaufen, bis Sie einen kompletten Satz von acht verschieden Figuren gesammelt haben? Die verschiedenen Figuren sind mit gleicher Häufigkeit in den Packungen vertreten.

Hinweis: Betrachten Sie $Y_i := X_i - X_{i-1}$, wobei X_i die Zahl der gekauften Packungen sei, bis Sie i verschiedene Figuren beisammen haben. Warum ist Y_i geometrisch verteilt?

Aufgabe 56
Um ihr Studium zu finanzieren jobben Sie nebenbei als Interviewer und befragen bei einer ihrer Missionen zufällig Wahlberechtigte um das Wahlergebnis einer bestimmten Partei vorherzusagen. Bestimmen Sie approximativ, wie viele Wähler Sie befragen müssen, damit Sie sich bei Ihrer Prognose mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.9 um höchstens 1% (absolut) irren? Benuzten Sie zur Approximation den zentralen Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace.

Aufgabe 57
Die Anzahl der Wähler die sie laut der vorherigen Aufgabe befragen müssten ist Ihnen zu hoch. Wieviele Wähler müssen Sie befragen, damit Sie sich mit Ihrer Prognose mit einer Wahrscheinlichkeit von mind. 0.9 um höchstens 2% (Prozentpunkte) irren? Benutzen Sie wieder den zentralen Grenzwertsatz zur Approximation.

Aufgabe 58
Als Sie versuchen sich in Ihrer Heimatstadt von Studium und Job zu erholen, lesen sie in der lokalen Zeitung einen Bericht zur anstehenden Gemeinderatswahl. Der Bericht beinhaltet neben den üblichen Wahlversprechen eine angebliche repräsentative Umfrage zur Wahl, im Kleingedruckten findet sich der Hinweis das sich Prognose mit mind. 99% um höchstens 1% irrt. Aufgrund der Ergebnisse der frühren Aufgaben trauen Sie dieser Umfrage nicht, insbesondere da es in Ihrer Heimatstadt knapp 15000 Wahlberechtigte gibt. Wieviele Wähler hätte man befragen müssen um eine Umfrage mit der oben beschrieben Genauigkeit durchführen zu können?

Aufgabe 59
Jedes Jahr findet zu Beginn des Wintersemster eine Computereinführungsveranstaltung statt. Aus langjähriger Erfahrung weiß man, daß etwa 18 % der angemeldeten Kursteilnehmer nicht zum Kurs erscheinen. Und da jeder Teilnehmer einen eigenen Rechner während des Kurses braucht können nicht mehr Teilnehmer als freie Computer am Kurs teilnehmen. Insgesamt gibt es zehn Kurstermine mit je 22 Plätzen und in jedem der zwei Fächer, die für diesen Kurs in Frage kommen, gibt es je 120 Erstsemster. Um die Rechnung zu vereinfachen wird von einem großen Termin ausgegangen, d.h. ein Termin mit 220 Plätzen. Berechnen Sie mittels Approximation durch den zentralen Grenzwertsatz

1. die Wahrscheinlichkeit dafür, daß alle Kursteilnehmer die zum Kurs da sind einen Platz finden, wenn sich für den Kurs alle Erstsemster angemeldet haben.

2. wie viele Anmeldungen dürfen höchstens angenommen werde, wenn mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.99 alle erscheinenden Kursteilnehmer in einem Kurs mit 220 Plätzen einen Platz finden sollen.

Aufgabe 60
Um knapp zwei Kilogramm Brombeermarmelade zu kochen braucht man ungefähr 1000 Brombeeren. Aus jahrelanger Erfahrung wissen Sie das in einer von hundert ein Wurm ist. Wie groß ist Wahrscheinlichkeit das in den tausend Brombeeren in höchstens fünf ein Wurm ist? Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit jeweils,

1. exakt,

2. mit der Approximation durch die Poisson-Verteilung,

3. mit dem Zentralen Grenzwertsatz

Bestimmen Sie auch den jeweiligen relativen Approximationsfehler.

Lösung zu Modul 1

Lösung zu Aufgabe 1
Grundraum: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(a) $A = \{2, 4, 6\}$

(b) $B = A^c = \Omega \backslash A = \{1, 3, 5\}$.

(c) $C = \{\emptyset\}$ unmögliches Ereigniss.

(d) $D = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

(e) $E = \{1, 4\}$

(f) $F = \{2, 3, 5\}$

Lösung zu Aufgabe 2
Grundraum:

$$\begin{aligned}\Omega \;=\; \{&(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(1,5);(1,6);\\ &(2,1);(2,2);(2,3);(2,4);(2,5);(2,6);\\ &(3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(3,5);(3,6);\\ &(4,1);(4,2);(4,3);(4,4);(4,5);(4,6);\\ &(5,1);(5,2);(5,3);(5,4);(5,5);(5,6);\\ &(6,1);(6,2);(6,3);(6,4);(6,5);(6,6);\}\end{aligned}$$

(a) $A = \{(1,6);(2,5);(3,4);(4,3);(5,2);(6,1)\}$

(b) Primzahlen $= \{2, 3, 5, 7, 11\}$

$$\begin{aligned}B \;=\; \{&(1,1);(1,2);(2,1);(1,4);(2,3);(3,2);\\ &(4,1);(1,6);(2,5);(3,4);(4,3);(5,2);\\ &(6,2);(5,6);(6,5)\}\end{aligned}$$

(c) $C = \{(3,6);(6,3);(4,5);(5,4)\}$

(d) $D = \{(2,2);(1,4);(4,1);(3,3);(4,4);(5,5);(6,6)\}$

Lösung zu Aufgabe 3

(a) $A = \{2, 4, 6\}$

(b) $B = \{3, 6\}$

(c) $C = \{1, 4, 6\}$

(d)
$$A \cap B = \{6\}$$
$$A \cap C = \{4, 6\}$$
$$B \cap C = \{6\}$$

(e)
$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$$
$$A \cup C = \{1, 2, 4, 6\}$$
$$B \cup C = \{1, 3, 4, 6\}$$

(f)
$$\bar{A} = \Omega \backslash A = \{1, 3, 5\}$$
$$\bar{B} = \Omega \backslash B = \{1, 2, 4, 5\}$$
$$\Omega \backslash C = \{2, 3, 5\}$$
$$\overline{A \cap B} = \Omega \backslash A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$\overline{B \cap C} = \Omega \backslash B \cap C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$\bar{A} \cap \bar{B} \text{ mit} \bar{A} = \{1, 3, 5\}; \bar{B} = \{1, 2, 4, 5\} \quad \bar{A} \cap \bar{B} = \{1, 5\}$$

Lösung zu Aufgabe 4
P(A) = 0.7 P(B) = 0.6 $P(A \cap B) = 0.5$

(a) $P(A \cup B) = 0.8$

(b) $P(\bar{A}) = 0.3$

(c) $P(\bar{B}) = 0.4$

(d) $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0.5$

(e) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.2$

(f) $P(A \cap \bar{B}) = 0.2$

(g) $P(\bar{A} \cap B) = 0.1$

(h) $P[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)] = 0.3$

Lösung zu Aufgabe 5
P(A) = 0.6 P(B) = 0.4 $P(A \cap B) = 0.2$

(a) $P(A \cup B) = 0.8$

(b) $P(\bar{A}) = 0.4$

(c) $P(\bar{B}) = 0.6$

(d) $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0.8$

(e) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.2$

(f) $P(A \cap \bar{B}) = 0.4$

(g) $P(\bar{A} \cap B) = 0.2$

(h) $P[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)] = 0.6$

Lösung zu Aufgabe 6
P(A) = 0.8 P(B) = 0.5 $P(A \cap B) = 0.4$

(a) $P(A \cup B) = 0.9$

(b) $P(\bar{A}) = 0.2$

(c) $P(\bar{B}) = 0.5$

(d) $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0.6$

(e) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.1$

(f) $P(A \cap \bar{B}) = 0.4$

(g) $P(\bar{A} \cap B) = 0.1$

(h) $P[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)] = 0.5$

Lösung zu Aufgabe 7

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)^c &\iff x \notin A \cup B \\ &\iff x \notin A \text{ und } x \notin B \\ &\iff x \in A^c \text{ und } x \in B^c \\ &\iff x \in A^c \cap B^c \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 8
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Nutzer zufälligerweise das Wort “passwort” tippt ist $\frac{1}{26^8}$.

Lösung zu Aufgabe 9
P(“Zahl durch drei teilbar”) = 1.
P(“Zahl durch sechs teilbar”) = 0.
P(“Zahl durch neun teilbar”) = 1.

Lösung zu Aufgabe 10
P(“Zahl durch drei teilbar”) = 1.
P(“Zahl ist durch fünf teilbar”) $= \frac{1}{4}$
P(“Zahl durch neun teilbar”) = 0.

Lösung zu Aufgabe 11
P(“Zahl durch zwei teilbar”) $= \frac{3}{5}$.
P(“Zahl durch drei teilbar”) = 0.
P(“Zahl durch vier teilbar”) $= \frac{3}{10}$.

Lösung zu Aufgabe 12
P(“Zahl durch vier teilbar”) $= \frac{3}{10}$.
P(“Zahl ist durch fünf teilbar”) $= \frac{1}{5}$
P(“Zahl durch acht teilbar”) $= \frac{1}{6}$.

Lösung zu Aufgabe 13
P(“Zahl durch zwei teilbar”) $= \frac{4}{7}$
P(“Zahl durch drei teilbar”) = 0
P(“Zahl durch vier teilbar”) $= \frac{2}{7}$
P(“Zahl ist durch fünf teilbar”) $= \frac{1}{7}$

Lösung zu Aufgabe 14

$P(A) = \frac{1}{6^4}$

Lösung zu Aufgabe 15
$P(A_1) \approx 0.518 \qquad P(A_2) \approx 0.491$

(b) Die Wahrscheinlichkeit in 4 Würfen mindestens eine 6 zu würfeln, ist größer als die Wahrscheinlichkeit mindestens eine Doppelsechs in 24 Würfen zu bekommen.

Lösung zu Aufgabe 16

$P(A) = \frac{1}{6}$

Lösung zu Aufgabe 17

Bei dieser Aufgabe handelt es sich nicht um ein Laplac-Modell, da die Augensummen 11 und 12 nicht mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftreten.

Lösung zu Aufgabe 18
$P(A) = \approx 0.0309$

Lösung zu Aufgabe 19
a) $P(A) \approx 0.1975$
b) $P(A) \approx 0.135$
c) $P(A) = \frac{80}{81}$

Lösung zu Aufgabe 20

$P(A) = \frac{5}{18}$

Lösungen zu Modul 2

Lösung zu Aufgabe 21
(a) 32650
(b) 1260
(c) 15120
(d) 83160
(e) 20160
(f) 10080

Lösung zu Aufgabe 22
a. 64
b. 24
c. 20
d. 4

Lösung zu Aufgabe 23

	i)	ii)	iii)	iv)
a)	25	625	218	36
b)	20	120	120	30
c)	15	70	56	21
d)	10	5	20	15

Lösung zu Aufgabe 24

P(gleiche Farbe) $= \frac{1}{2}$

Lösung zu Aufgabe 25

a) P(gleiche Farbe) $= \frac{1}{2}$
b) P(gleiche Farbe) $= \frac{4}{9}$
c) P (gleiche Farbe)$= \frac{1}{3}$

Lösung zu Aufgabe 26

(a)Mit Zurücklegen:

$P(A_0) = \frac{8}{64}$
$P(A_1) = \frac{24}{64}$
$P(A_2) = \frac{24}{64}$
$P(A_3) = \frac{8}{64}$

(b)Ohne Zurücklegen:

$P(A_0) = 0$
$P(A_1) = \frac{1}{2}$
$P(A_2) = \frac{1}{2}$
$P(A_3) = 0$

Lösung zu Aufgabe 27

(a)Mit Zurücklegen:

$P(A_0) = \frac{4}{16}$
$P(A_1) = \frac{8}{16}$
$P(A_2) = \frac{4}{16}$

(b) ohne Zurücklegen:

$P(A_0) = \frac{2}{12}$
$P(A_1) = \frac{8}{12}$
$P(A_2) = \frac{2}{12}$

Lösung zu Aufgabe 28

(a)Mit Zurücklegen:

$P(A_0) = \frac{64}{218}$
$P(A_1) = \frac{96}{218}$
$P(A_2) = \frac{48}{218}$
$P(A_3) = \frac{8}{218}$

(b)Ohne Zurücklegen:

$P(A_0) = \frac{1}{5}$
$P(A_1) = \frac{3}{5}$
$P(A_2) = \frac{1}{5}$
$P(A_3) = 0$

Lösung zu Aufgabe 29

(a)Mit Zurücklegen:

$P(A_0) = \frac{64}{343}$
$P(A_1) = \frac{144}{343}$
$P(A_2) = \frac{108}{343}$
$P(A_3) = \frac{27}{343}$

(b)Ohne Zurücklegen:

$P(A_0) = \frac{4}{35}$
$P(A_1) = \frac{18}{35}$
$P(A_2) = \frac{12}{35}$
$P(A_3) = \frac{1}{35}$

Lösung zu Aufgabe 30

(a)Mit Zurücklegen:

$P(A_0) = \frac{27}{343}$
$P(A_1) = \frac{108}{343}$
$P(A_2) = \frac{144}{343}$
$P(A_3) = \frac{64}{343}$

(b)Ohne Zurücklegen:

$P(A_0) = \frac{1}{35}$
$P(A_1) = \frac{12}{35}$
$P(A_2) = \frac{18}{35}$
$P(A_3) = \frac{4}{35}$

Lösung zu Aufgabe 31

(a)Mit Zurücklegen:

$P(A_0) = \frac{125}{343}$
$P(A_1) = \frac{150}{343}$
$P(A_2) = \frac{60}{343}$
$P(A_3) = \frac{8}{343}$

(b)Ohne Zurücklegen:

$P(A_0) = \frac{2}{7}$
$P(A_1) = \frac{4}{7}$
$P(A_2) = \frac{1}{7}$
$P(A_3) = 0$

Nach der Verdoppelung der Kugelanzahl:

(a) Die Wahrscheinlichkeiten ändern sich nicht

(b) ohne Zurücklegen:

$P(A_0) = \frac{30}{91}$
$P(A_1) = \frac{45}{91}$
$P(A_2) = \frac{15}{91}$
$P(A_3) = \frac{1}{91}$

Lösung zu Aufgabe 32
a.$= 4.71 \cdot 10^{21}$
b.$= 1.96 \cdot 10^{20}$

Lösung zu Aufgabe 33
$P(A) = \frac{2}{9}$

Lösung zu Aufgabe 34
a)$P(A) \approx 0,289$

b) $P(A) \approx 0.0559$

Lösung zu Aufgabe 35
a)177147
b)1594323

Lösung zu Aufgabe 36
$P(A) = \frac{1}{13983816}$

Lösung zu Aufgabe 37
$P(A) \approx 0.022440\ldots$

Lösung zu Aufgabe 38

a)$P(A) \approx 0.018637\ldots$

b)$P(A) \approx 0.023834\ldots$

Lösung zu Aufgabe 39

(a) Die Ereignisse A und B sind unabhängig.

(b) Die Ereignisse A und C nicht unabhängig.

(c) Die Ereignisse B und C nicht unabhängig.

(d) Die Ereignisse A,B, und C abhängig.

Lösung zu Aufgabe 40
1) A,B,C paarweise stochastisch unabhängig.
2) A,B und C stochastisch abhängig.

Lösungen zu Modul 3

Lösung zu Aufgabe 41
(a)
$$\begin{aligned}\Omega &= \{(\omega_1, \bar{\omega_1}, \omega_2, \bar{\omega_2}\} \\ A_i &= \{\omega_i, \bar{\omega_i}\} \\ B &= \{\bar{\omega_1}, \bar{\omega_2}\}\end{aligned}$$

(b)
$P(A_1) = 0.5 \quad P(B|A_1) = 0.2$
$P(A_2) = 0.5 \quad P(B|A_2) = 0.02$
(c)
$P(B) = 0.11$
(d)
$P(A_1|B) = \frac{10}{11}$

$P(A_2|B) = \frac{1}{11}$

Lösung zu Aufgabe 42
(a) analog obige Aufgabe

(b)
$P(A_1) = 0.50 \quad P(B|A_1) = 0.04$
$P(A_2) = 0.40 \quad P(B|A_2) = 0.0125$
$P(A_3) = 0.10 \quad P(B|A_3) = 0.25$
(c)
$P(B) = 0.05$
(d)
$P(A_1|B) = 0.40$
$P(A_2|B) = 0.10$
$P(A_3|B) = 0.50$

Lösung zu Aufgabe 43
(a) analog obige Aufgabe

(b)
$P(A_1) = 0.4 \quad P(B|A_1) = 0.225$
$P(A_2) = 0.6 \quad P(B|A_2) = 0.35$
(c)
$P(B) = 0.30$
(d)
$P(A_1|B) = 0.3$
$P(A_2|B) = 0.7$

Lösung zu Aufgabe 44
(a) analog obige Aufgabe

(b)
$P(A_1) = 0.5 \quad P(B|A_1) = 0.27$
$P(A_2) = 0.5 \quad P(B|A_2) = 0.33$
(c)
$P(B) = 0.30$
(d)
$P(A_1|B) = 0.45$

$P(A_2|B) = 0.55$

Lösung zu Aufgabe 45
(a) analog obige Aufgabe

(b)
$P(A_1) = 0.25 \quad P(B|A_1) = 0.15$
$P(A_2) = 0.25 \quad P(B|A_2) = 0.18$
$P(A_3) = 0.25 \quad P(B|A_3) = 0.09$
$P(A_4) = 0.25 \quad P(B|A_4) = 0.18$
(c)
$P(B) = 0.15$

(d)
$P(A_1|B) = 0.25$
$P(A_2|B) = 0.30$
$P(A_3|B) = 0.15$
$P(A_4|B) = 0.30$

Lösung zu Aufgabe 46

(a) analog obige Aufgabe

(b)

$$\begin{array}{ll} P(A_1) = 0.20 & P(B|A_1) = 0.0125 \\ P(A_2) = 0.20 & P(B|A_2) = 0.025 \\ P(A_3) = 0.20 & P(B|A_3) = 0.005 \\ P(A_4) = 0.40 & P(B|A_4) = 0.018755 \end{array}$$

(c)

$P(B) = 0.025$

(d)

$$\begin{array}{l} P(A_1|B) = 0.10 \\ P(A_2|B) = 0.20 \\ P(A_3|B) = 0.40 \\ P(A_4|B) = 0.30 \end{array}$$

Lösung zu Aufgabe 47

(a) analog obige Aufgabe

(b)

$$\begin{array}{ll} P(A_1) = 0.10 & P(B|A_1) = 0.15 \\ P(A_2) = 0.20 & P(B|A_2) = 0.375 \\ P(A_3) = 0.20 & P(B|A_1) = 0.225 \\ P(A_4) = 0.10 & P(B|A_2) = 0.30 \\ P(A_5) = 0.40 & P(B|A_2) = 0.3375 \end{array}$$

(c)

$P(B) = 0.3$

(d)

$P(A_1|B) = 0.05$

$P(A_2|B) = 0.25$

$P(A_3|B) = 0.15$

$P(A_4|B) = 0.1$

$P(A_5|B) = 0.45$

Lösung zu Aufgabe 48
a)
$P(A) = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{1}{3}$; $P(C) = \frac{1}{4}$

(b)
$P(A|B) = \frac{1}{2}$; $P(B|A) = \frac{1}{3}$; $P(A|C) = \frac{1}{3}$; $P(C|A) = \frac{1}{6}$
$P(B|C) = \frac{4}{9}$; $P(C|B) = \frac{1}{3}$; $P(A|B \cap C) = \emptyset$; $P(B|A \cap C) = \emptyset$

Lösung zu Aufgabe 49
(a)
$P(A) = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{1}{3}$; $P(C) = \frac{1}{4}$
(b)
$P(A|B) = \frac{1}{2}$;$P(B|A) = \frac{1}{3}$;$P(A|C) = 1$;$P(C|A) = \frac{1}{2}$
$P(B|C) = \frac{1}{9}$;$P(C|B) = \frac{1}{12}$;$P(A|B \cap C) = 1$;$P(B|A \cap C) = \frac{1}{9}$

Lösung zu Aufgabe 50
(a)

$P(A) = \frac{1}{6}$;$P(B) = \frac{4}{9}$;$P(C) = \frac{1}{2}$

(b)
$P(A|B) = \frac{1}{4}$;$P(B|A) = \frac{2}{3}$;$P(A|C) = \frac{1}{3}$;$P(C|A) = 1$
$P(B|C) = \frac{4}{9}$;$P(C|B) = \frac{1}{2}$;$P(A|B \cap C) = \frac{1}{2}$;$P(B|A \cap C) = \frac{2}{3}$
(c)
(i.)
$\frac{1}{9} \neq \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{9}$
(ii.)
$\frac{1}{6} \neq \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}$
(iii.)
$\frac{4}{9} \neq \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2}$
(iv.)
$\frac{1}{9} \neq \frac{1}{27}$

Lösung zu Aufgabe 51

$P(A) = 0.0126$

Lösung zu Aufgabe 52

$P(A) = 0.716417\ldots$

Lösung zu Aufgabe 53

Der Erwartungswert des Würfels beträgt 3.5 . Sie sollten also die 3 Euro bezahlen

Lösung zu Aufgabe 54

a. Der Erwartungswert des Würfels beträgt 6.
b. Der Erwartungswert des Würfels beträgt 12.
c. Der Erwartungswert des Würfels beträgt $4\frac{2}{3}$.

Lösung zu Aufgabe 55

$E[X_8] \approx 21.74$

Man muß 22 Packungen kaufen.

Lösung zu Aufgabe 56
Es müssen mindesten $n \geq 6807$ Wähler befragt werden.

Lösung zu Aufgabe 57
Es müssen mindesten $n \geq 1702$ Wähler befragt werden.

Lösung zu Aufgabe 58
Es müssen mindesten $n \geq 16641$ Wähler befragt werden. Was hier nicht möglich ist da es nur 15 000 gibt.

Lösung zu Aufgabe 59
a) $P(0 \leq$ Anmeldungen $\leq$ max. Plätze$) \approx 0.9999$

b) Es dürfen höchstens 250 Anmeldungen angenommen werden.

Lösung zu Aufgabe 60

1) $P(A) \approx 0.0661$
2) $P(A) \approx 0.0671$.
Der relative Fehler der Approximation ist $\frac{0.0671-0.0661}{0.0661} \approx 0.0150 = 1.5\%$.
3) $P(A) \approx 0.0552$
Der relative Fehler der Approximation ist $\frac{0.0552-0.0661}{0.0661} \approx -0.1649 = -16.49\%$.